**Logica: formeel en informeel**

**Hoofdstuk 1 – Logica, redeneringen en geldigheid**

* 1. **Logica**

Aspecten voor definitie van logica:

* Er wordt een grond gegeven
* Er is een zeker gezag waar de spreker beroep op doet
* Logica impliceert coherentie

Definitie van Copi probeert bij dagelijks taalgebruik aan te sluiten: *logica is de studie van de methoden en beginselen die gebruikt worden om goed (correct) van slecht (niet correct) redeneren te onderscheiden*. Aantal termen blijven zo echter onduidelijk. Daarbij is het nog te vroeg voor een definitie: er zijn veel verschillende definities en ook door de geschiedenis heen is er vrij verschillend over logica gedacht.

Aristoteles’ definitie: *Het onderzoek inzake het ontstaan van redeneringen* (opbouw)*, hun ontdekking* (hoe vindt je middenterm?) *en hun validatie.*

Definitie van Thomas: *Een noodzakelijke kundigheid die leiding geeft aan de verstandsact zelf, waardoor de mens namelijk in die acht van het verstand geordend, met gemak en zonder dwalign te werk gaat.* Bij de verstandsact dacht Thomas aan het begrip, het oordeel en de redenering. Dit is een relatief psychologische benadering.

Psychologische: opvatting dat de logica een tak van de psychologie is. Zou haar afhankelijk van het voorstelbare maken, aan zekerheid doen inboeten en aan exactheid doen verliezen. Bestreden door Frege en Husserl. Frege: logica gaat over wetten van het waar-zijn, cultuuronafhankelijke denkwetten die in het rijk van het objectief liggen en dus van het subject onafhankelijk zijn. Echter, waarheid treedt in de logica niet ‘absoluut’, maar slechts ‘hypothetisch’ op: het is de geldigheid van ware of onware redeneringen die centraal staat.

* 1. **Redeneringen**

Definitie Aristoteles: *Een redenering is een (gesproken of geschreven) tekst waarin uit het gestelde iets anders dan het gestelde met noodzaak volgt krachtens het gestelde.* Heeft echter slechts betrekking op geldige redeneringen, en ‘met noodzaak volgen’ is nog wat vaag. Maar onderscheid tussen premissen en conclusie is wel meteen duidelijk.

Redeneerschema is een analyse van een argumentatieve tekst in termen van premissen en conclusies. Kan weergegeven worden in tekst of met letters.

Inferentiële implicatie = horizontale streep = “gegeven de premissen mag men besluiten tot” = dus.

Argumentatief karakter van teksten wordt vaak verhuld door uitweidingen, bespelingen van gevoelens en onderbrekingen van de gedachtegang.

Vuistregel of er sprake is van redenering: kijk of er iets geponeerd wordt als volgend uit iets anders.

* 1. **Geldigheidsbeoordeling: redeneervormen**

Interferentiële implicatie staat centraal bij het opstellen van een redeneerschema. Het gaat daarin om geldigheid. Maar wat is geldigheid, en wanneer is een redenering geldig? De formele logica probeert in ieder geval het inhoudelijke aspect van redeneringen te overstijgen. Een onware redenering kan daarom wel geldig zijn, namelijk als je de conclusie moet aanvaarden indien je de premissen aanvaardt. En voor die aanvaarding is de structuur, de vorm van de redenering belangrijk.

Onder ‘bewijs’ wordt in het algemeen een geldige redenering met ware premissen verstaan, de uitzondering van het bewijs uit het absurde daargelaten.

Het wijzigen van de inhoud van de redenering met handhaving van de structuur, kan een manier zijn om de ongeldigheid van een redenering op het spoor te komen.

Definitie van geldigheid: *Een redenering is geldig desda (dan en slechts dan als) men de conclusie niet kan ontkennen zonder in tegenspraak te komen met minstens één van de premissen.*

Tot (on)geldigheid wordt besloten aan de hand van een *redeneervorm*, een soort abstracte dieptestructuur van de redenering die bereikt wordt door het vervangen van concrete uitdrukkingen voor variabelen. *P, q* en *r* worden in het boek voor proposities gebruikt; *a, b* en *c* voor predicaten. Redeneervormen horen altijd bij een bepaald logisch systeem en kunnen alleen binnen dat systeem op hun geldigheid worden beoordeeld!

Een logische regel kan worden gezien als een vertaling van een logische wet, die op zeer abstracte wijze noodzakelijke waarheid formuleert. Wetten verwijzen naar de fundamenteel theoretische kant van logica, regels naar de meer praktische kant.

* 1. **Redeneervormen als (re)constructies**

Bij het toekennen van een redeneervorm is de actieve inbreng van de interpreterende nog groter dan bij het opstellen van een redeneerschema. Er moet gekozen worden welke onderdelen van de tekst logisch relevant en irrelevant zijn, hoe de redeneervorm wordt opgesteld en binnen welk logisch systeem. Daarbij moeten de gegevens soms zelfs creatief aangevuld worden. De genoemde problemen zullen in omgekeerde richting behandeld worden.

Een enthymeem is een redenering met een verzwegen premisse of –conclusie en dus vanuit logisch standpunt onvolledig. In het gewone taalgebruik zijn ze meer regel dat uitzondering. Soms is het gebruik retorisch: door een premisse weg te laten kan ze bijvoorbeeld gesloten worden voor kritiek. In de syllogistiek spreekt men van een enthymeem van de eerste, tweede of derde orde naargelang de eerste, tweede of derde regel van het syllogisme verzwegen wordt.

Het probleem van de systeemkeuze ontstaat wanneer meerdere logische systemen geschikt lijken een uitspraak te beoordelen, terwijl ze tot een verschillend verdict komen. Er is dan aan hetzelfde redeneerschema een verschillende redeneervorm toegekend. Dit kan echter ook met de vooronderstellingen van de systemen te maken hebben. Zo zijn twee belangrijke vooronderstellingen van de syllogistiek dat er niet met lege klassen (niet-bestaande entiteiten) en niet met collectieve termen gewerkt wordt. De predicatenlogica werkt wel met lege klassen, wat één van de redenen is dat ze als meer verfijnd of exact wordt beschouwd. Samenvattend: het begrip ‘geldigheid’ is niet systeem-gebonden, maar de geldigheidsbeoordeling wel.

In de behandeling van het probleem van de relevantie wordt vooral gesproken over de redeneervorm waarin redeneringen o.b.v. transitiviteit gegoten moeten worden. Er kan een RT als transitieve relatie gekozen worden (met als nadeel dat de R niet meer algemeen is), of de transitiviteit van de relaties kan in een extra premissen weergegeven worden (met als nadeel dat iedere redenering geldig kan worden met een onware extra premisse). Dit lijkt te bevestigen dat waarheid (van achterliggende logische wetten) fundamenteler is dan geldigheid. Tot slot laat de twee mogelijke redeneervormen zien dat het onderscheid tussen vorm en inhoud niet altijd scherp is.

Conclusie is dat men nooit van *de* logische vorm van een redenering kan spreken. Logische systemen *construeren* vormen voor geldigheid. En de vormen worden bepaald door de bijdrage die de uitspraken aan de geldigheid van de constructen kunnen leveren.

**Hoofdstuk 2 – Redelijke interpretatie**

Naast inhoud en vorm is er nog de strekking: taalgebruik kan in plaats van bewerend bijvoorbeeld ook directief zijn. Er zijn dus drie soorten interpretaties: van inhoud, van vorm en van strekking.

**2.4 Soorten taalgebruik en de notie ‘geldigheid’**

In de formele logica wordt de geldigheid van een redenering uitsluitend door haar structuur bepaald. Ze abstraheert daarmee van allerlei zaken als personen, plaats, tijd, omstandigheden die wel van belang zijn in de retoriek en dialectiek, waarin het meer om overtuigen draait. In het algemeen geldt dat het verschil in oriëntatie tussen formele logica en gewoon taalgebruik veel interpretatieverschillen teweegbrengt, bijvoorbeeld in ‘sommige mensen zijn gelukkig’ of ‘ik handelde en dacht na’.

Semiotiek, studie van tekens, bestaat uit drie aandachtsvelden:

1. Syntactiek: relatie van tekens onderling. Gaat over zinnen: vorm.
2. Semantiek: relatie tussen tekens en dat waar ze naar verwijzen. Gaat over propositie en verwijzing: inhoud.
3. Pragmatiek: relatie tussen tekens en tekengebruikers. Gaat over taaldaden: strekking.

Syntactiek en semantiek zijn abstracties uit de pragmatiek, al vooronderstelt de pragmatiek hen wel. Logica gaat over syntactiek en semantiek.

Aan een taaldaad kunnen drie aspecten onderscheiden worden: de inhoud, met betekenis en verwijzing (het locutionaire), de rol of strekking in de communicatie (het illocutionaire) en het effect op de hoorder (het perlocutionaire).

De illocutionaire kracht *F* en inhoud *F(p)* kunnen aan de hand van functoren of operatoren weergegeven worden, bijvoorbeeld Ⱶ voor de beweringskracht, ! voor een bevel en ? voor een vraag. In de interpretatie van de strekking wordt bepaald welk soort taalgebruik van toepassing is. De meest voorkomende zijn:

1. Informatief (beschrijvend, bewerend) taalgebruik. Propositionele houding: geloven of menen. “Ⱶ*p*”
2. Direct of beïnvloedend taalgebruik. Houding is willen of wensen. “!*p*”
3. Expressief taalgebruik. Houding: uiten van gevoel. “!!*p*” of “G*p*”
4. Verbintenissen, spreker committeert zich aan handeling. Houding: intentie hebben iets te doen of na te laten. “V*p*”
5. Institutioneel taalgebruik. “D*p*”, het is een instutioneel feit dat *p*, moet volgens regels. Houding: nieuwe toestand bindend aanwezig verklaren.
6. Evaluerend taalgebruik. Propositionele houding: beoordeling in het licht van een norm. “E*p*”

Door het locutionaire aspect van imperatief taalgebruik zijn er ook daarin logische relaties aanwezig die geanalyseerd kunnen worden. En door het onderscheid met het illocutionaire aspect, zijn ook ethische redeneringen op hun geldigheid te beoordelen. Zo kan een ethische redenering de volgende vorm hebben:

! (als A dan niet B)  
Ⱶ A  
-------------------------  
! niet B

Dit verbreedt wel de definitie van geldigheid, omdat een norm niet zozeer *waar* is als wel *geldig.* Het blijft in ieder geval om een kwaliteit gaan die noodzakelijk overgaat van premissen naar conclusie. Er is ook geprobeerd propositionele houdingen in de logische analyse in te voeren, die gelinkt zouden worden aan het oude begrip ‘modus’. Probleem van deze deontische logica is echter dat ze een logica van handelingen en dus van verandering impliceert, terwijl we in de logica juist steeds van een statische wereld uitgaan.

**Hoofdstuk 4 – De syllogistiek**

**4.1 Waarom syllogistiek?**

Alleen in een logisch systeem kan geldigheid beoordeelt worden, en in de formele logica bepaalt de vorm of structuur die geldigheid. Syllogistiek is formeel, maar niet symbolisch. Het formaliseren, gebruik van symbolen zonder verwijzing naar betekenis, gaat daarvoor niet ver genoeg. Termen worden dan vervangen door variabelen, plaatsen waar constanten ingevoerd kunnen worden. Aristoteles’ variabelen zijn termvariabelen, wat drie beperkingen met zich meebrengt:

1. In variabelen kunnen alleen onderwerpen of naamwoordelijke delen van gezegdes ingevoerd worden.
2. Termen die door symbolen worden vervangen, mogen niet leeg zijn (draken en zo).
3. Termen mogen niet collectief gebruikt zijn, alleen distributief.

Aristoteles formaliseert slechts in bepaalde mate. Er zijn maar 24 geldige syllogismen. Syllogistiek kan eenvoudig opgenomen worden in complexere predicatenlogica, alleen valt de geldigheid dan soms anders uit. Om historische en didactische redenen wordt de syllogistiek toch eerst apart behandeld.

**4.2 Categorische uitspraken: het logisch vierkant en conversie**

Syllogisme bestaat uit categorische uitspraken, er wordt iets geprediceerd van een subject (S-P). Standaardvorm bestaat uit twee termen die door werkwoord ‘zijn’ gekoppeld worden. Op basis van kwaliteit en kwantiteit zijn er vier soorten S-P uitspraken (klinkers komen van ‘affirmo en nego’):

1. A*ba* (universeel bevestigend)

Singuliere uitspraken als ‘Socrates is wijs’ zijn universeel, niet particulier.

1. I*ba* (particulier bevestigend)
2. E*ba* (universeel ontkennend)
3. O*ba* (particulier ontkennend)

Vier mogelijkheden functioneren als punten van het ‘logisch vierkant’, verbonden door zes lijnen. De lijnen staan voor vormen van *oppositie,* hetin kwaliteit en/of kwantiteit verschillen van uitspraken die hetzelfde subject en predicaat hebben, waar er weer vier van zijn:

1. Contradictie: verschil in kwaliteit *en* kwantiteit. Altijd één waar en één onwaar.
2. Contrariteit: universele uitspraken die in kwaliteit verschillen. Uitspraken kunnen niet beiden waar zijn, wel beiden onwaar. Slechts uit bevestiging van één kan dus ontkenning van ander worden afgeleid.
3. Subcontrariteit: particuliere proposities die in kwaliteit verschillen. Kunnen beiden bevestigd moeten worden, maar niet beiden ontkend. Uit ontkenning van één volgt dus bevestiging van ander.
4. Subalterniteit: slechts verschil in kwantiteit. Wordt de universele zin bevestigd, dan ook de particuliere zin. Wordt particuliere zin ontkend, dan ook de universele zin.

Termem hebben extensie (denotatie, omvang) en intensie (connotatie, inhoud). Intensie is het geheel van semantische trekken, meestal als de definiërende trekken gezien, zoals “vrouw die één of meer kinderen heeft” bij ‘moeder’. De extensie is de relatie van een term tot wat eronder valt: in dit geval alle individuen die moeder zijn. De intensie bepaalt dus de extensie; en toename van intensie betekent afname van extensie.

Termen hebben altijd een bepaalde distributie. Als de term niet naar zijn gehele omvang gebruikt wordt, is hij niet gedistribueerd. In *Alle Grieken zijn mens* is het subject ‘Griek’ gedistribueerd, maar het predicaat ‘mens’ niet. In *Sommige studenten zijn niet rijk* is het subject ‘studenten’ niet gedistribueerd, maar het predicaat weer wel. Vuistregel: subject is gedistribueerd als het geen probleem is (aan de quantor te zien), predicaat is bijna alleen in negatieve zinnen gedistribueerd. Maar volgens mij kan het ook zo: wordt de extensie van een term beperkt door een intensie die van elders in de zin wordt toegevoegd?

*Omkering of conversie is het vormen van een nieuwe uitspraak door in een gegeven zin S en P te verwisselen. Of het geldig is, kan o.b.v. distributieleer of gewoon taalgevoel bepaald worden.*

* *Omkering zonder meer, eenvoudige conversie: quantor niet veranderd. Mag bij een E-zin (beide termen gedistribueerd) en bij een I-zin (geen van beiden gedistribueerd).*
* *Beperkte omkering: kwantiteit veranderd. Mag bij een E-zin en een A-zin.*

*Negatie kan op koppelwerkwoord, maar ook op naamwoordelijk deel van gezegde slaan. Regel van obversie: copula van een zin mag ontkent worden als tegelijk predicaat ontkend wordt. Bijvoorbeeld: Aba impliceert Eba’ en Iba impliceert Oba’. Hoewel het soms lege klassen geeft en daardoor niet werkt, staan moderne logici obversie ook toe op negaties, zodat Aba’ uit Eba volgt en Oba Iba impliceert.*

*Let op: “Geen sterfelijk wezen is volmaakt. Geen mens is onsterfelijk. Dus geen mens is volmaakt.” wordt in het boek ongeldig verklaard, omdat eerst obversie toegepast moet worden op de tweede uitspraak.*

*Met logisch vierkant, conversie en obversie zijn de bekendste onmiddellijke besluiten voor categorische uitspraken gegeven. Syllogismen zijn middellijke besluiten, hebben dus meer dan één premisse.*

* 1. **Geldige syllogismen**

Een syllogisme heeft een zeer bepaalde structuur:

1. Bestaat slechts uit categorische uitspraken in standaardvorm (A, E, I of O), waarvan twee premissen en één conclusie.
2. Er treden drie termen op (elke uitspraak bevat er twee): middenterm, major-term (predicaat van de conclusie, *a*) en minor-term (subject van de conclusie, *b*).
3. Standaardvorm: Major (met major-term), Minor (met minor-term) en conclusie.
4. Elk syllogisme heeft dus een figuur en een modus, die haar samen beschrijven.

Figuur wordt bepaald door de plaats van de middentermen in de premissen (4 opties). Modus wordt bepaald door de kwaliteit en kwantiteit van iedere uitspraak, door drie letters dus, zodat een mogelijk syllogisme eruit komt te zien als AII-3. Op basis van deze code, die dus figuur en modus omvat, kan de geldigheid van een syllogisme worden beoordeeld.

[vier mogelijke figuren moeten gekend worden!]

Traditionele regels van syllogisme:

1. *m* dient in ten minste één premisse gedistribueerd te zijn, anders is haar verbindende functie niet gegarandeerd.
2. Term die niet gedistribueerd is in de premissen, mag dat ook niet in de conclusie zijn, anders zou de conclusie over *meer* gaan.
3. Ten minste één premisse dient affirmatief te zijn.
4. Is er een negatieve premisse, dan moet de conclusie ook negatief zijn.
5. Zijn beide premissen affirmatief, dan ook de conclusie.
6. Uit twee particuliere premissen volgt niets.
7. Is één van de premissen particulier, dan ook de conclusie.

Er zijn uiteindelijk 24 geldige syllogismen, waaronder Barbara, Celarent, Darii en Ferio. De grond van hun evidentie ligt in hun structuur, omdat de minor extensioneel vervat is in de middenterm en deze weer in de major. In andere woorden: wat universeel wordt gezegd van een subject, wordt gezegd van al wat daaronder valt.

* 1. **Syllogistiek en dagelijks taalgebruik**

Syllogismen zijn middellijke, maar enkelvoudige redeneringen. Ze kunnen op twee wijzen aan elkaar gekoppeld worden tot complexe redeneringen:

1. *Polysyllogismen* zijn reeksen van syllogismen, waarbij de conclusie van het voorafgaande als premisse van het volgende syllogisme dient. Syllogismen moeten uiteraard apart op geldigheid worden gecontroleerd.
2. *Sorites* of kettingredeneringen zijn verkorte (enthymematische) vormen van polysyllogismen. Het predicaat van de vorige uitspraak wordt steeds het subject van de volgende; en in de conclusie wordt het subject van de eerste uitspraak aan het predicaat van de laatste verbonden.

Een handreiking of *epicheirema* houdt in dat er gronden worden aangereikt voor premissen binnen het syllogisme. Het eigenlijke syllogisme en het enthymematisch bewijs voor een premisse moeten goed uit elkaar worden gehouden om het epicheirema van een polysyllogisme te onderscheiden.

Soms heeft een uitspraak dusdanig aanpassing nodig om tot standaardvorm te worden, dat er een *parameter* ingevoerd moet worden, zoals van ‘hier’ naar ‘deze plaats is een plaats waar’, of met ‘tijd’.

Als men aan de geldigheid twijfelt, moet eerst een redeneerschema opgesteld worden en vervolgens worden gecheckt of er wel sprake is van een syllogisme. Daarna kan men de regels nagaan, het rijtje van 24 checken, of een tegenvoorbeeld zien te vinden.

**Hoofdstuk 5 – Propositielogica**

**5.1 Technische termen, het nut van formaliseren**

In de propositielogica worden zinnen als blokken behandeld en dus de betrekkingen tussen uitspraken bestudeerd (of het effect van de negatie op een uitspraak als geheel). Variabelen zijn dus altijd zinsvariabelen, geen termvariabelen als in de syllogistiek. Enkele termen:

|  |  |
| --- | --- |
| Functie | Uitdrukking die één of meer variabelen bevat. (f (p,q) = p V q) |
| Uitdrukking | Grafisch teken of groep van grafische tekens (hoi) |
| Variabele | Uitdrukking zonder vastgelegde betekenis, duidt plaats aan waar constante kan worden ingevoerd (*p, q, r)*. |
| Constante | Uitdrukking die een bepaalde betekenis heeft (A, B, C).  Voorbeeld: A = het regent. |
| Uitspraak (of zin) | Uitdrukking die afzonderlijk geponeerd kan worden (het regent) |
| Propositionele functie | Uitdrukking die een zin wordt zodra variabelen conform hun syntactische categorie door constanten zijn vervangen. (f (p,q) = p V q, p = het regent, q = het hagelt). Anders gezegd: functie waarbij de variabelen proposities zijn. |
| Syntactische categorie | Klas van uitdrukkingen in gegeven taal die onderling vervangbaar zijn in een zinvolle uitdrukking. (zelfstandig naamwoord) |
| Argument | Een zinvariabele (voorbeeld: het regent). |
| Functor (of operator) | Grafisch teken dat de waarde van een uitdrukking mede beslist. Naar het aantal argumenten is er sprake van een n-plaatsige functor. (voorbeeld: disjunctie) |
| Waarde | Waarheid (1) of onwaarheid (0) van een uitspraak. |
| Waarheidsfunctor | Zinbepalende functor, waarde van door hem en zijn argumenten gevormde uitdrukking hangt slechts af van de waarde van zijn argumenten, dus niet van hun betekenis. Ofwel: een functor die je gebruikt bij waarheidsfuncties, en niet bij getallen. (voorbeeld: negatie) |
| Waarheidsfunctie | Functie die bestaat uit één of meer waarheidsfunctoren met bijbehorende argumenten. Ofwel: functie die om waarheid draait, en niet om getallen of zo. |

De propositielogica is het meest fundamentele systeem: de wetten die hier gelden zijn eenvoudiger dan en gelden eveneens in de andere systemen van symbolische logica (die voegen er eigen wetten aan toe). Er is een structuurovereenkomst die tot uiting komt in de formalisering.

In formalisering worden tekens los van hun betekenis gebruikt, waardoor we op louter syntactisch vlak met een taal kunnen opereren. In het rekenen werken we met een geformaliseerde taal van het tekensysteem van de cijfers; in de propositielogica dus met een geformaliseerde taal van ongeanalyseerde zinnen.

Twee eisen aan geformaliseerde taal:

1. Vormingsregels (*well formed formulae*) die bepalen wat syntactisch zinvol is. Zo worden in een axiomatisch systeem een aantal basistermen vastgelegd in het lexicon van het systeem en daar via vormings- of definitieregels weer andere uitdrukkingen uit afgeleid.
2. Afleidingsregels om de waarheid van uitspraken uit die van andere af te leiden: formele logica. De regels moeten ‘waarheidsbehoudend’ zijn.

Zo kan logica gebruikt worden om over een ander systeem (bijv. wiskunde) te spreken, als metataal tegenover een objecttaal. Ook logica zelf kan echter ook tot onderzoeksobject worden in een axiomatische benadering.

Axiomatisering geeft een beter inzicht in de begripsvorming en structuur van een wetenschap en legt het empirisch fundament van een systeem bloot. Maar ook buiten het axiomatisch systeem heeft formalisering veel voordelen, samenhangend met haar syntactische werkwijze: ze geeft inzicht in de structuur van redeneringen en van meer ingewikkelde problemen als het logicisme.

De logica is echter niet puur syntactisch. In het formuleren van haar regels is ze namelijk wel degelijk semantisch bezig. Daarbij staat ze uiteindelijk toch ten dienste van waarheid en dus betekenis.

Toch heeft geformaliseerde taal het voordeel alleen op de vorm van de tekens te slaan, waardoor ongeformuleerde (en dus oncontroleerbare) vooronderstellingen geen rol spelen in de bewijsvoering en de gevolgen van de *wel* geformuleerde regels sneller aan het licht komen. Tot slot worden dubbelzinnigheden en emotionele belastingen die in de gewone taal vaak optreden, vermeden.

Er zijn echter ook nadelen. Zo wordt er wel erg veel geabstraheerd: van de omstandigheden waarin de redenering is gesitueerd, van de concrete formulering, de eigenheid van afzonderlijke talen, van de buitenlogische constanten en van de betekenisnuances in de gewone taal. Hoe meer de nuances van de gewone taal benaderd worden, hoe gecompliceerder een logisch systeem echter wordt. En buiten de logica wordt door filosofen als Wittgenstein II zelfs bestreden dat geformaliseerde talen überhaupt filosofisch nut hebben, omdat de problemen voortkomen uit de gewone taal van het dagelijks leven, waarin vage, open en vloeiende begrippen nu eenmaal nodig zijn.

**5.2 Eenplaatsige waarheidsfunctoren**

De belangrijkste is de negatie. Ze heeft de eigenschap een ware zin onwaar te maken en andersom.

Syntactische definitie: is *p* een zin, dan is ook ¬ *p* een zin (blijft ook hetzelfde bij alle tweeplaatsige functoren)

Semantische definitie: ¬ is een eenplaatsige waarheidsfunctor volgens de waarheidstafel:

|  |  |
| --- | --- |
| *p* | ¬*p* |
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

**5.3 Tweeplaatsige waarheidsfunctoren**

Bij een eenplaatsige functor zijn er 4 mogelijkheden; bij een n-plaatsige wel 4n. Van de 16 tweeplaatsige gebruiken we er echter maar enkelen.

1. Het *product*: Λ. Beide atomaire uitspraken moeten waar zijn om het geheel waar te laten zijn. De conjunctor Λ impliceert geen volgorde en kan zelfs weggelaten worden, zodat *p* Λ *q pq* wordt. Semantische definitie: een tweeplaatsige waarheidsfunctor volgens de volgende matrijs:

|  |  |
| --- | --- |
| *pq* | *p* Λ *q* |
| 11 | 1 |
| 10 | 0 |
| 01 | 0 |
| 00 | 0 |

1. De *logische som* of *inclusieve disjunctie*: V. In het Nederlands ook wel ‘en/of’. Matrijs:

|  |  |
| --- | --- |
| *pq* | *p* V *q* |
| 11 | 1 |
| 10 | 1 |
| 01 | 1 |
| 00 | 0 |

1. De *exclusieve disjunctie* of *contravalentie:* ˃–<. *Of* het één is waar *of* het ander. Matrijs:

|  |  |
| --- | --- |
| *pq* | *p* ˃–< *q* |
| 11 | 0 |
| 10 | 1 |
| 01 | 1 |
| 00 | 0 |

1. De *functor van Sheffer:* /. Stelt slechts dat niet beiden tegelijk het geval kunnen zijn.

|  |  |
| --- | --- |
| *pq* | *p/q* |
| 11 | 0 |
| 10 | 1 |
| 01 | 1 |
| 00 | 1 |

1. De *materiële implicatie*: →. Als het antecedent waar is, is het consequens (implicatum) het ook. De laatste twee volgen uit ‘uit het onware volgt om het even wat’, maar contrasteert met de gewone taal. Aansluitend bij de gewone taal is de *strikte implicatie* ingevoerd onder de waarheidstafel 1000.

|  |  |
| --- | --- |
| *pq* | *p* → *q* |
| 11 | 1 |
| 10 | 0 |
| 01 | 1 |
| 00 | 1 |

1. De *equivalentie:* ↔. Dit is een wederkerige implicatie, ook te formuleren als ‘dan en slechts dan als’.

|  |  |
| --- | --- |
| *pq* | *p* ↔ *q* |
| 11 | 1 |
| 10 | 0 |
| 01 | 0 |
| 00 | 1 |

Uiteindelijk kan het gebruik van de functoren tot twee herleid worden: ¬ en V, ¬ en Λ of ¬ en →. Met haakjes kunnen functoren gecombineerd worden. Toch is er ook een orde van kracht: implicatie en equivalentie – inclusieve en exclusieve disjunctie – product.

Tot slot: er zijn ook allerlei andere notaties voor de verschillende functoren.

**5.4 Evaluatie**

Evaluatie: Tonen dat een uitdrukking een logische wet is of niet.

Logische wet: Formele waarheid, zinsfunctie die altijd waar is, ongeacht de waarheid van afzonderlijke constanten die als argumenten ingevoerd worden. Tautologie.

Elementaire uitdrukking: Uitdrukking die bestaat uit slechts één functor en bijbehorende argumenten.

Contingente formule: Eén die soms waar is, maar niet altijd, afhankelijk van constanten.

Contradictie: Formule die altijd onwaar is, los van constanten.

Er zijn drie methoden om te evalueren:

1. Directe methode. Kijk hoeveel verschillende variabelen er zijn, stel het aantal substituties 2n vast (elke variabele 0 of 1), realiseer al deze substituties en stel de waarheid de uitdrukking na elke substitutie vast. Is de uiteindelijke waarde 0 of 1? Als er altijd 1 uitkomt, is er sprake van een logische wet.
2. Indirecte methoden: meteen die substituties uitproberen die mogelijk 0 opleveren. Implicatie, som en functor van Sheffer zijn hierbij belangrijk, want maar in één geval 0. Als de functie falsifieerbaar is, is ze geen logische wet, anders wel.
3. Onmiddellijke substitutie, zelfde als 1 maar met tabel alle mogelijkheden tegelijk uitproberen.

**5.5 Elementaire redeneervormen. Wetten en regels**

Op pag. 138-139 worden 10 afleidingswetten (gebaseerd op implicatie) en 11 vervangingswetten (gebaseerd op equivalentie) genoemd. Zorg die allemaal te kennen en toe te kunnen passen!

Een wet zegt wat het geval is, een regel pas wat men mag *doen* in termen van afleiden. Regels zijn de grammatica van het correcte redeneren. Ging het in de *semantische methoden* (betekenis van functoren in waarheidstafels) om *waarheid* en *onwaarheid*, in het toepassen van de regels gaat het om *syntactische methoden*. Beiden zijn nodig om geldig te redeneren. De regels hebben betrekking op de structuur van een redenering en bepalen hoe volgens redeneerstappen uit de ene formule of zin tot de andere wordt besloten. Er zijn invoeringsregels en eliminatieregels; bij de eerste wordt er een waarheidsfunctor toegevoegd en bij de laatste verdwijnt er juist één. Het teken dat voor de syntactische afleidbaarheid staat, is ‘Ⱶ ‘.

Regels zijn dus de praktijkgerichte afleidingen van wetten. Voorbeelden zijn de Conjunctie-Invoeringsregel (CI) en de Implicatie-Eliminatieregel (CE). Maar in feite kunnen alle 21 wetten worden geformuleerd als regels van een systeem van natuurlijke deductie (voor een strikt syntactisch systeem zouden *alle* regels *en* de axioma’s, definities en vormingsregels gegeven moeten worden). Onze benadering blijft echter meer syntactisch, we gaan uit van de tot regels omgevormde 21 wetten, die we *elementaire redeneervormen* noemen.

Het onderscheid tussen wetten en regels is voorts een puur filosofisch probleem, dat zelfs samenhangt met de ontologische vraag of de logische wetten een afspiegeling zijn van de werkelijkheid en de werkelijkheid dus fundamenteel logisch van aard is. Pag. 143-144 geven een schets van een discussie hierover weer.

**5.6 Ontleding in elementaire redeneervormen**

Het testen van redeneringen met veel verschillende variabelen m.b.v. waarheidstafels of door afleiding uit wetten, is erg omslachtig. Daarom ontleden we dergelijke redeneringen in elementaire redeneervormen. In andere woorden: de weg van premissen naar conclusie wordt opgedeeld in stapjes die volgens de 21 logische regels geldig zijn. Er is hierbij vindingrijkheid nodig; waarbij de conclusie steeds in het oog gehouden moet worden.

Structuur:

1. Functie 1 Premisse 1
2. Functie 2 Premisse 2, te bewijzen: Functie 3
3. Functie 4 Regel, onderliggende functies
4. Functie 3 Regel, onderliggende functies

Conclusie bewezen

Voorbeeld:

1. p → q Pr
2. q → r Pr
3. ¬r Pr … ¬p
4. p → r H.S. 1,2
5. ¬p T.T. 3,4

**5.7 Het bewijzen van de onjuistheid van een redenering; de waarheidsbomen**

Als een redenering niet in elementaire delen te ontleden is, betekent dat nog niet dat ze ongeldig is. Er zijn drie methoden om de ongeldigheid van een redenering aan te tonen:

1. De al genoemde methodes van evaluatie, waarvan de indirecte methode het belangrijkst is.
2. Een tegenvoorbeeld vinden. M.b.v. waarheidsbomen kunnen we dit mechanisch aanpakken.
3. Onderlinge onverdraagzaamheid van de premissen aantonen. Dit kan eveneens formalistisch, net als in 5.6 wordt er stap voor stap toegewerkt naar een tegenstrijdigheid. De oorspronkelijke conclusie doet er dan niet eens meer toe.

De methode van de waarheidsbomen is erg behulpzaam. We zetten eerst de premissen onder elkaar en vervolgens de negatie van de oorspronkelijke conclusie eronder (omdat de negatie in het gezochte tegenvoorbeeld waar moet zijn). Vervolgens wordt er in de vorm van elementaire delen doorgeredeneerd. Als alle implicaties uit een premisse zijn gehaald, komt er een vinkje voor. Als er meerdere opties zijn, vindt er een splitsing plaats, die voor een inclusieve disjunctie staat. Als één van de uiteinden van de doorredenering *niet* in een contradictie eindigt, is er een tegenvoorbeeld gevonden. Er wordt nog steeds volgens de 21 regels geredeneerd. Het enige nieuwe is de stap naar meerdere opties die in een functie besloten liggen. Bijvoorbeeld: bij (p ↔ q) zijn de opties ‘p Λ q’ of ‘¬p Λ ¬q’. Voor voorbeelden van waarheidsbomen: pag. 148-152.

We hebben vooralsnog de indirecte methode alleen voor functies gebruikt, maar aangezien een inferentie m.b.v. een conjunctor en een implicator tot een functie kan worden herschreven, kan ze ook gebruikt worden om inferenties te testen. Aan de andere kant kan de methode van de waarheidsbomen ook gebruikt worden om te testen of een functie en logische wet is. Ze wordt dan gewoon zelf ontkend en op tegenvoorbeelden onderzocht.

De indirecte methode en de methode van de waarheidsbomen laten alleen zien *dat* een redenering ongeldig is, niet *waarom* dat het geval is. De methode van ontleding in elementaire redeneervormen blijft wat dat betreft toegevoegde waarde houden.

**5.8 Het vaststellen van syntactische zinvolheid**

Syntactische zinvolheid is een voorwaarde om überhaupt de geldigheid te kunnen evalueren. Een syntactisch zinvolle uitdrukking is *een uitdrukking waarin aan alle functoren argumenten beantwoorden naar aantal en syntactische categorie vereist door de syntactische categorie van hun functor*. Een uitdrukking is een functor (implicatie), een argument (het regent) of beiden (‘blaft’ in de zin ‘Bello blaft hard’; ze bepaald Bello maar wordt door ‘hard’ bepaald). Functoren worden onderscheiden naar aantal-plaatsigheid, naar syntactische categorie van hun argumenten (naam-, uitspraak- en functor*bepalend*) en naar syntactische categorie van het geheel dat ze constitueren (naam-, uitspraak- en functor*makend*). De functorbepalende en –makende categorieën worden buiten beschouwing gelaten. De uitdrukkingen die slechts argumenten zijn, zijn de elementaire categorieën: individuen (*n*), klassen (*n* of *u*) en uitspraken (*e*). Een functor wordt al breuk weergegeven, waarbij de teller staat voor de syntactische categorie die de functor maakt en de noemer voor alle argumenten waar ze betrekking op heeft.

Vanuit deze notatie kan de syntactische zinvolheid als volgt bepaald worden: de functoren en argumenten worden naast elkaar gezet, de functoren vooraan (1), de uitdrukkingen worden geïndexeerd naar hun syntactische categorie (2), equivalenten boven en onder de breuklijn worden weggestreept (3), de uitdrukking is syntactisch zinvol als er een enkele *‘e’* overblijft (4).

Een alternatieve categoriale analyse werkt met de categorieën *‘n’* (naamwoord) en *‘z’* (zin), waarbij een werkwoord als wandelen de notatie *‘n/z’* krijgt, omdat ze een *‘n’* nodig heeft om tot een *‘z’* te worden.

**5.9 Propositielogica, dagelijks taalgebruik, en de wetten van het denken**

Zoals gezegd zijn de functoren abstracties. Ze verwijzen naar de structuur van uitspraken, terwijl in het dagelijks taalgebruik niets los van de inhoud te verkrijgen is. De functoren komen in het dagelijks spreken ook in vele verschillende impliciete en expliciete vormen voor.

De eerste beginselen van de logica (of: wetten van het denken) gelden zowel voor het denken als in de werkelijkheid (wat filosofisch natuurlijk veel vragen oproept). Het gaat om de volgende:

1. Beginsel van identiteit: *p* ↔ *p,* alles is wat het is.
2. Beginsel van geen tegenspraak: ¬ (*p* Λ ¬*p*), niet is tegelijk iets en is het niet, onder hetzeflde opzicht.
3. Beginsel van uitgesloten midden: *p* ˃–< ¬*p,* elk ding is iets of het is het niet, er is geen midden tussen die twee.

**Hoofdstuk 6 – Traditionele, klassieke en niet-klassieke logica’s**

**6.1 Diverse soorten logica’s**

In de traditionele logica is de term het eindpunt van de analyse. De klassieke logica is verder geformaliseerd en heeft zo de traditionele logica gerechtvaardigd en verder uitgebreid. De propositie-, predicaten- en klassenlogica zijn allemaal klassieke systemen, waarvan de wetten analoog aan elkaar zijn.

Een kenmerk van klassieke logica is dat ze waarheidsfunctioneel is, hetgeen betekent dat we met de waarheidswaarde van de afzonderlijke proposities automatisch de waarheidswaarde van de d.m.v. waarheidsfunctoren samengestelde propositie kunnen berekenen. Niet-waarheidsfunctionele logica is bijvoorbeeld de modale logica, die betrekking heeft op redeneringen met modale bijwoorden als ‘het is mogelijk dat’ of ‘het is noodzakelijk dat’. Deze logica is niet functioneel, omdat vanuit de waarheid van de proposities ‘cirkels zijn rond’ en ‘Tolstoj schreef literatuur’ niet eenduidig tot de waarheid van hun ‘het is noodzakelijk dat’-varianten besloten kan worden: die hangt namelijk niet alleen af van de waarheidswaarde van de oorspronkelijke proposities in de feitelijke wereld, maar ook van die in ‘mogelijke werelden’.

Evenzo is ook de tijdslogica niet-klassiek, omdat een verleden-tijdoperator bijvoorbeeld niet eenduidig waarheidsfunctioneel is, maar haar resultaat mede afhangt van de feitelijke wereld. Logica die niet waarheidsfunctioneel is wordt ‘intensioneel’ genoemd (tegenover de klassieke ‘extensionele’ logica). Een ander voorbeeld van intensionele logica is de *epistemische logica*, die het logisch gedrag van begrippen als ‘weten’ en ‘geloven’ bestudeerd en waarbij begrippen die naar hetzelfde verwijzen niet meer zomaar gesubstitueerd mogen worden (Amsterdam als grootste stad vs. Amsterdam als hoofdstad).

Naast haar waarheidsfunctionaliteit onderscheid de klassieke logica zich in het gehanteerde *principe van bivalentie*: proposities zijn ofwel waar ofwel onwaar. Dit principe wordt doorbroken door niet-verwijzende namen als ‘de koning van Frankrijk’, die mede oorzaak waren van de ontwikkeling van *meerwaardige logica’s*, waarin er meer waarheidswaardes zijn dan 0 en 1. Zo krijgen uitspraken over de toekomst soms de waarde ½, of zelfs een waarde die samenvalt met de kans.

Waar de intensioneel-logische benadering de logica volgens het principe van bivalentie *te zwak*, vindt, is de kritiek van het Intuïtionisme dat ze juist *te sterk* is. Haar kritiek is niet semantisch (‘de koning van Frankrijk’), maar epistemologisch: een propositie heeft alleen waarheidswaarde als er ook een methode (mogelijk) is om uit te maken of de propositie waar is of niet. Omdat ze (*p* V ¬*p*) niet erkent, kan deze logica geen gebruik maken van waarheidstafels, die ze dan ook vervangt voor de iets voorzichtigere *asserteerbaarheidstafels*.

**Hoofdstuk 7 – Predicatenlogica**

De syllogismen hangen af van de innerlijke structuur van de zinnen. In de propositielogica is daar geen ruimte voor; vandaar de predicatenlogica.

* 1. *Eenplaatsige predicaten*

A. De eerdere particuliere en universele zinnen worden in de predicatenlogica ondergebracht onder de ‘algemene zinnen’, die zich onderscheiden van de ‘singuliere zinnen’. Een singuliere uitspraak bestaat uit een individu-constante (*a - w*) en een predicaatsterm (*A - Z*). Er wordt geen gebruik gemaakt van een copula, de termen worden gewoon naast elkaar gezet en dan als zinsvariabele behandeld, zodat meteen de regels van de propositielogica gehanteerd kunnen worden. ‘Socrates is wijs’ wordt dan bijvoorbeeld Ws, en ‘als Socrates wijs is, is hij deugdzaam’ wordt ‘Ws → Ds’.

De ‘*x*’ is geen constante, maar een variabele; waar Ws een uitspraak is, is W*x* dus een functie. Om een uitspraak van de functie te maken, moet ze of geïnstantieerd worden (er wordt een individu-constante ingevoerd) of gekwantificeerd: er wordt een quantor ingevoerd. Er is de existentiële quanator (Ǝ*x*) die zegt ‘er is minstens één *x* van dien aard dat’ en er is de universele quantor (*x*) die stelt ‘voor elke *x* geldt dat’. Voor beiden geldt uiteraard: in ons universum *of* interpretatiedomein. Waar instantiëren tot een singuliere uitspraak leidt, leidt kwantificeren tot een algemene, die dan particulier of universeel kan zijn.

Een *atomaire* zin is bijvoorbeeld (Ǝ*x*) M*x* voor ‘iets is mooi’ (particulier) en (*x*) V*x* voor ‘alles is vergankelijk (universeel). Waarschuwing: woorden als ‘iets’, ‘alles’ en ‘geen’ zijn *niet* als eigennamen te hanteren!

De categorische uitspraken uit de syllogistiek zijn in de predicatenlogica kwantificaties van *moleculaire* zinsfuncties:

* Iba wordt (Ǝ*x*) [M*x* Λ G*x*]
* Oba wordt (Ǝ*x*) [M*x* Λ ¬G*x*]
* Aba wordt (*x*) [M*x* → G*x*]
* Eba wordt (*x*) [M*x* → ¬G*x*]

Er zijn echter wel een paar structurele verschillen:

1. We zijn van een S-P structuur overgegaan naar formele implicaties en producten.
2. Het subject was een verwijzende uitdrukking, terwijl *x* een lege plaats voor een constante is, ze moet nog geïnstantieerd worden.
3. De nieuwe notatie laat zien dat particuliere en universele zinnen een heel verschillende interne structuur hebben. Vooral belangrijk is dat door de mogelijkheid van lege klassen een universele zin met een lege klas waar is, maar een particuliere onwaar. Hierdoor volgt uit de waarheid van de universele zin die van de particuliere niet meer; we kunnen niet van een implicatie naar een conjunctie overstappen. Bij atomaire zinnen kan dit nog wel.

B. De bewijsvoering in de predicatenlogica kent twee verschillende aanpakken. In de eerste methode (Copi) worden de gekwantificeerde predicaatlogische zinnen geïnstantieerd in singuliere zinnen, waarna de regels van de propositielogica worden toegepast, om vervolgens de singuliere conclusies weer te generaliseren. De Tweede methode (Bochenski) vertaalt de regels van de propositielogica in predicaatlogische regels en blijft dan op het niveau van de predicatenlogica functioneren.

Copi werkt dus met instantiaties. Een belangrijk verschil is er tussen universele instantiaties (UI) en existentiële instantiaties (EI). De eerste is de instantiatie van een algemene functie (*x*), waarbij de instantiatie *y* een *ambigue naam* is: ze geldt om het even welk individu. De tweede is een instantiatie van een particuliere functie (Ǝ*x*), waarbij de instantiatie *z* een *vaag individu* is, een ons onbekend maar wel specifiek individu. Nadat de conclusies gevonden op het niveau van de instantiatie getrokken zijn, wordt de conclusie d.m.v. een universele of existentiële *generalisatie* (UG of EG) weer gegeneraliseerd. Voor voorbeelden: zie pag. 178-179.

Belangrijk is verder dat bij een combinatie van universele en particuliere uitspraken, de existentiële instantiatie de voorrang krijgt, omdat universele uitspraken wel opgaan voor vage individuen, maar particuliere niet voor ambigue namen. Ze worden dan dus beiden door één en hetzelfde vage individu geïnstantieerd. De letter die voor de instantiatie gebruikt wordt, moet verder wel uniek moet zijn. Verschillende particuliere uitspraken kunnen vanzelfsprekend *niet* in één het hetzelfde vage individu geïnstantieerd worden.

Vanwege mogelijkheid van lege klassen, kun je in de predicatenlogica niet uit een algemene uitspraak concluderen tot het bestaan van minimaal één geval, terwijl dat in de syllogistiek wel kan. 9 van de 24 geldige syllogismen zijn daardoor in de predicatenlogica niet meer geldig.

Een laatste, zeer belangrijke beperking is van Copi’s methode is dat ontkennende universele uitspraken niet geïnstantieerd mogen worden. Een redenering die niet opgaat voor alle individuen, kan tenslotte nog steeds opgaan voor sommigen van hen. Copi moet in die gevallen toch naar de methode van Bochenski kijken, waar we nu op in zullen gaan.

C. Bochenski vertaalt de wetten van de propositielogica gewoon naar de predicatenlogica. [(*p* → *q*) Λ *p*] → *q* wordt dan bijvoorbeeld *(x)* {[(f*x* → g*x*) Λ f*x*] → g*x*}. Hierin funcitoneert niet alleen *x* als variabele, maar ook *f* en *g*, omdat ze vervangen kunnen worden door iedere willekeurige letter.

Toch komen er ook enkele wetten bij die eigen zijn aan de predicatenlogica, omdat ze betrekking hebben op de quantoren. Een voorbeeld hiervan is de wet van de quantorenverwisselingen (Q.V.), die stelt dat de universele en particuliere quantoren verwisseld mogen worden mits daarbij zowel de quantor als de functie in hun negatie worden omgezet.

De beperking van Bochenski’s methode is dat hij soms toch ook instantiatie nodig heeft, bijvoorbeeld om vanuit *(x)* [(f*x* → g*x*) Λ fa] tot ‘ga’ te besluiten. Vanuit een advies van een gelijknamig logicus noemt hij deze operatie dan ‘een Albert van Saksen’.

**7.2 Tweeplaatsige predicaten**

Bij twee- of meerplaatsige predicaten kunnen we de innerlijke structuur blootleggen van predicaten die naar meerdere objecten verwijzen. Het is even wennen aan de nieuwe notatie, maar verder blijft alles precies hetzelfde werken als bij de éénplaatsige predicaten. Enkele voorbeelden:

* Piet rookt een sigaret: R (p, s).
* Predicaat van x en y: f (x, y).
* Predicaat van x en y dat voor minstens één x en alle y opgaat: (Ǝx) (y) f(x,y).
* Sommige mensen haten elkaar : (Ǝx) ( Ǝy) [(mx Λ my) Λ (hxy Λ hyx)].
* Iemand stelt iedereen voor aan iemand: (Ǝx) (y) (Ǝz) [sx, y, z].
* De koning van Frankrijk is kaal (volgens Russel): (Ǝx) [fx Λ {(y) [fy → (y = x)] Λ kx}].

(NB: (Ǝx) ( Ǝy) en s(x, y, z) zijn identiek aan (Ǝx, y) en [sx, y, z])

‘x = y’ betekent ‘x is identiek aan y’. De identiteit is dus een tweeplaatsige relatie. De drie centrale wetten van de identiteit zijn:

* (x) (x = x) Reflexiviteit
* (x, y) [(x = y) ↔ (y = x)] Symmetrie
* (x, y, z) {[(x = y) Λ (y = z)] → (x = z)} Transitiviteit

**7.3 De boommethode als bewijsvoering in de predicatenlogica**

In paragraaf 7.3 wordt de boommethode gebruikt om de geldigheid van redeneringen in de predicatenlogica te testen. Er zijn slechts enkele bijkomstigheden t.a.v. de boommethode in de propositielogica:

1. Er worden universele en existentiële instantiaties (en generaliseringen) toegepast.
2. Er worden quantorenverwisselingen toegepast.
3. Om de reflexiviteit, symmetrie en transitiviteit van identiteitsrelaties te kunnen bewijzen, worden twee extra regels ingevoerd:
   1. ‘n ≠ n’ geldt als afsluiting van een pad.
   2. uit ‘a ≠ b’ en ‘b = a’ mag tot de contradicties ‘a ≠ a’ en ‘b ≠ b’ besloten worden, om het pad vervolgens af te kunnen sluiten.

Verder: voorbeelden uit het boek bestuderen en oefeningen maken!

**Hoofdstuk 8 – Klassenlogica**

Een klas bestaat uit een aantal leden dat één of meer definiërende eigenschappen gemeen heeft en kan dus gezien worden als de extensie van één of meer predicaten. Belangrijk is de symbolisering van de klassen in logische taal te begrijpen.

* {x | ϕ x} De klas van alle x’en van dien aard dat ϕx. Bijvoorbeeld: alle Leuvenaren.
* α, β, γ Namen van klassen
* y ε {x | ϕ x} y is een element van de klasse ϕx.

**8.1 Het construeren van nieuwe klassen; betrekkingen tussen klassen**

* ¬α {x | x ε α}, dus: alle x’en die *niet* tot de klasse α behoren.
* α β {x | x ε α Λ x ε β }, het product, alle x’en die tot beide klassen behoren.
* α ∪ β {x | x ε α V x ε β }, alle x’en die tot minimaal één van beide klassen behoren.
* α || β {x | x ε α / x ε β }, alle x’en die tot maximaal één van beide klassen behoren.
* α ⊂β {x | x ε α → x ε β }, ofwel: α is een deelverzameling van β.
* α = β {x | x ε α ↔ x ε β }, ofwel: α en β zijn identiek.
* V {x | x = x}, de universele of totale of al-klas. Het logisch oneindige: “T”.
* Λ {x | x ≠ x}, de lege of nul-klas die geen enkel element bevat. Er is maar één

lege klas, welke naam we haar ook geven, en ze behoort tot elke klas, omdat ze geen elementen bevat die haar van de klasse uitsluiten. Ook wel: ø.

* Ǝ!α (Ex) x ε α, ofwel: α is niet leeg.
* M (α) De klas van alle deelklassen van α. M[a,b} bestaat bijvoorbeeld uit Λ, {a}, {b}

en {a,b}.

Wat betreft de wetten van de klassenlogica, gelden in de eerste plaats alle wetten van de propositielogica. De proposities p, q, r worden simpelweg vervangen voor de klassen α, β, γ. Hiernaast gelden er echter ook een aantal nieuwe wetten in de klassenlogica, namelijk de volgende:

* Λ = ¬V Alles is de negatie van niets.
* (x) x ε V Alle x’en behoren tot de totale klas.
* (a) a ⊂V Alle klassen vallen binnen de totale klas.
* (x) x ε α ↔ α = V Als alle x’en tot α behoren, is α de totale klas.
* (α U ¬α) = V Alles valt ofwel binnen ofwel buiten een bepaalde klas.
* (α ¬α) = Λ Niets kan zowel binnen als buiten een bepaalde klas vallen.
* α V = α Het product van een klasse met de totale klas, doet haar niet

van extensie veranderen

* (α ⊂ b) ↔ [(¬α U β) = V] Als α geheel binnen β valt, is er niets dat niet *of* buiten α *of*

binnen β valt.

* Ǝ ! V De universele klas is niet leeg.
* ¬ Ǝ ! Λ Er behoort niets tot de lege klas.
* ¬ Ǝ ! α ↔ (α = Λ) Er is slechts één lege klas.
* Ǝ ! α ↔ (α ≠ Λ) Als er een x is die tot a behoort, is a geen lege klas.
* Ǝ ! (α β) → (E ! α Λ E ! β) Als het product van a en b niet leeg is, is geen van beiden

leeg.

**8.4 Enkele noties uit de logica van de relaties**

Het gaat hier om relaties tussen logische variabelen, die genoteerd worden als xRy. Vanzelfsprekend heeft x daarbij de relatie R tot y, waarbij x het antecedent en y het consequens wordt genoemd. Hier worden nog een aantal notaties aan toegevoegd, namelijk van de converse relatie en van het domein, co-domein en veld van R. De betekenis hiervan kan op blz. 204 gevonden worden (excuus, ik ben het invoeren van symbolen inmiddels een beetje zat). Tot slot worden de drie wetten van de identiteit (reflexiviteit, symmetrie en transitiviteit) in termen van de relatielogica weergegeven. Aangezien identiteit een relatie is, kan dat vrij eenvoudig, en dan moet dat natuurlijk even geshowd worden.

**8.5 Enkele noties uit de modale logica**

Alle redeneringen tot nu toe waren *assertorische redeneringen*, hetgeen wil zeggen dat het hypothetische verband tussen de zinnen eenvoudig werd geponeerd, zonder het de kwalificeren. Dit verband kan echter verschillende modi hebben, namelijk van noodzakelijkheid, (on)mogelijkheid en contingentie. De modale logica verdisconteert deze modi. De formuleringen zijn:

* □ p p is noodzakelijk (niet-p is onmogelijk)
* ◊ p p is mogelijk (niet-p is contingent)
* ¬ □ p p is onmogelijk (niet-p is noodzakelijk)
* ¬ ◊ p p is contingent (niet-p is mogelijk)

(wordt ook wel weergegeven met een ruitje met een stipje erin)

Op blz. 205 staat een mooi vierkantje dat de onderlinge verhoudingen van de verschillende modi goed laat zien.

Tot slot is het belangrijk te zien dat ‘p is mogelijk’ in de logica (i.t.t. stond te natuurlijke taal) nog niet impliceert dat niet-p ook mogelijk is.